COLÉGIO NAVAL – 2016 (1º dia)

MATEMÁTICA

PROVA AMARELA = Nº 01

PROVA ROSA = Nº 03

1) Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\dfrac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \le 0$. Sendo assim, pode-se afirmar que

a) S é um número divisíel por 7.

b) S é um número primo.

c) S^2 é divisível por 5.

d) $\sqrt{S}$ é um número racional.

e) 3S + 1 é um número ímpar.

RESOLUÇÃO:

Sendo $5x - 40 = 0 \Rightarrow x = 8$ satisfez

Como $(5x - 40)^2 \ge 0$ pois tendo x real, $x^2 - 10x + 21 < 0$

$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 7$

estudo do sinal: $\overset{+}{\longrightarrow}\ 3\ \overset{-}{\longrightarrow}\ 7\ \overset{+}{\longrightarrow}$

Logo: $x^2 - 10x + 21 \ge 0 \Rightarrow 3 < x < 7$

Como x é inteiro, x pode ser 4, 5, 6 ou 8

$S = 4 + 5 + 6 + 8 = 23$

GABARITO: B

PROVA AMARELA = Nº 02

PROVA ROSA = Nº 09

2) Dado o sistema $S: \begin{cases} 2x - ay = 6 \\ -3x + 2y = c \end{cases}$ nas variáveis x e y, pode-se afirmar que

a) existe $a \in \left]\dfrac{6}{5}, 2\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real C.

b) existe $a \in \left]\dfrac{13}{10}, \dfrac{3}{2}\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real C.

c) se $a = \dfrac{4}{3}$ e $c = 9$, o sistema S não admite solução.

d) se $a \neq \dfrac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.

e) se $a = \dfrac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.

RESOLUÇÃO:

S: possível determinado

$$\frac{2}{-3} \neq \frac{-a}{2} \Rightarrow a \neq \frac{4}{3}$$

S: possível indeterminado

$$\frac{2}{-3} = \frac{-a}{2} = \frac{6}{c} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ c = -9 \end{cases}$$

S: impossível

$$\frac{2}{-3} = \frac{-a}{2} \neq \frac{6}{c} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ c \neq -9 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível se $a = \dfrac{4}{3}$ e $c \neq -9$,

Sendo $a = \dfrac{4}{3}$ e $c = 9$, o sistema será impossível (c)

GABARITO: E ou C

PROVA AMARELA = Nº 03

PROVA ROSA = Nº 07

3) Seja $k = \left(\dfrac{9999...997^2 - 9}{9999...994}\right)^3$ onde cada um dos números 9999...997 e 9999...994, são constituídos de 2015 algarismos 9. Deseja-se que $\sqrt[i]{k}$ seja um número racional. Qual a maior potência de 2 que o índice *i* pode assumir?

a) 32

b) 16

c) 8

d) 4

e) 2

RESOLUÇÃO:

$$k = \left(\frac{A^2 - 9}{B}\right)^3$$

A = 99...97 com 2015 algarismos 9

A = 99...99 – 2 com 2016 algarismos 9

$A = 10^{2016} - 1 - 2 = 10^{2016} - 3$

$A^2 = 10^{4032} - 6 \cdot 10^{2016} + 9$

$A^2 - 9 = 10^{2016}\,(10^{2016} - 6)$

B = 99...94 com 2015 algarismos 9

B = 99...99 – 5 com 2016 algarismos 9

$B = 10^{2016} - 1 - 5$

$B = 10^{2016} - 6$

$$k = \left(\frac{10^{2016}\left(10^{2016} - 6\right)}{10^{2016} - 6}\right)^3 \Rightarrow k = 10^{6048}$$

$\sqrt[i]{k}$ seu racional, *i* é divisor de 6048

Como $6048 = 2^5 \times 3^3 \times 7$, e *i* é a maior potência de 2, *i* = 32

GABARITO: A

PROVA AMARELA = Nº 04

PROVA ROSA = Nº 010

4) Para capinar um terreno circular plano, de raio 7 m, uma máquina gasta 5 horas. Quantas horas gastará essa máquina para capinar um terreno em iguais condições com 14 m de raio?

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

RESOLUÇÃO:

Terreno circular plano de raio 7 m ⇒ área = 49π cm²

Terreno circular plano de raio 14 m ⇒ área = 196π cm²

49π ——— 5 h

196π ——— x

$$\frac{x}{5} = \frac{196\pi}{49\pi} \Rightarrow x = 20 \text{ horas}$$

GABARITO: C

PROVA AMARELA = Nº 05

PROVA ROSA = Nº 06

5) Para obter o resultado de uma prova de três questões, usa-se a média ponderada entre as pontuações obtidas em cada questão. As duas primeiras questões tem peso 3,5 e a 3ª, peso 3. Um aluno que realizou essa avaliação estimou que:

I – sua nota na 1ª questão está estimada no intervalo fechado de 2,3 a 3,1; e

II – sua nota na 3ª questão foi 7.

Esse aluno quer atingir média igual a 5,6. A diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão, de modo a atingir o seu objetivo de média é

a) 0,6

b) 0,7

c) 0,8

d) 0,9

e) 1

RESOLUÇÃO:

x: nota da 1ª quetão $\Rightarrow 2{,}3 \leq x \leq 3{,}1$

y: nota da 2ª quetão

m: média ponderada

$$m: \frac{3{,}5x + 3{,}5y + 7 \times 3}{3{,}5 + 3{,}5 + 3} = 5{,}6$$

$$\frac{3{,}5x + 3{,}5y + 21}{10} = 5{,}6 \Rightarrow 3{,}5x + 3{,}5y + 21 = 56$$

$3{,}5x = 35 - 3{,}5y \Rightarrow x = 10 - y$

Mas, $2{,}3 \leq x \leq 3{,}1$

$2{,}3 \leq 10 - y \leq 3{,}1$

$2{,}3 - 10 \leq -y \leq 3{,}1 - 10$

$-7{,}7 \leq -y \leq -6{,}9 \Rightarrow 6{,}9 \leq y \leq 7{,}7$

A diferença entre a maior e a menor nota = 7,7 – 6,9 = 0,8

GABARITO: C

PROVA AMARELA = Nº 06

PROVA ROSA = Nº 01

6) Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4, 5?

a) $\frac{12}{5}$

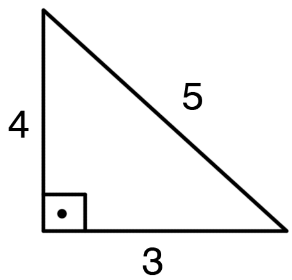
b) 3

c) 4

d) 5

e) $\frac{20}{3}$

RESOLUÇÃO:



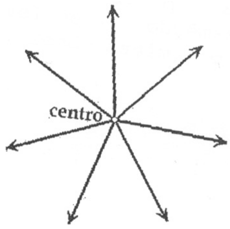
A maior altura é a oposta ao menor lado (3). Logo é o outro cateto, ou seja, mede 4.

GABARITO: C

PROVA AMARELA = Nº 07

PROVA ROSA = Nº 05

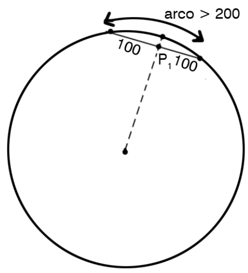
7) Observe a figura a seguir.



A figura acima representa o trajeto de sete pessoas num treinamento de busca em terreno plano, segundo o método “radar”. Nesse método, reúne-se um grupo de pessoas num ponto chamado de “centro” para, em seguida, fazê-las andar em linha reta, afastando-se do “centro”. Considere que o raio de visão eficiente de uma pessoa é de 100 m e que $\pi = 3$. Dentre as opções a seguir, marque a que apresenta a quantidade mais próxima do mínimo de pessoas necessárias para uma busca eficiente num raio de 900 m a partir do “centro” e pelo método “radar”.

a) 34
b) 29
c) 25
d) 20
e) 19

RESOLUÇÃO:



Uma pessoa seria suficiente para cobrir um arco de mais de 200 m.

O círculo todo tem um comprimento de $2\pi \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 900 = 5400$ m

Assim: 1 pessoa —— $a > 200$

27 pessoas —— $27a > 5400$ x 27

Então 27 pessoas cobririam a região <u>com sobra</u>.

Desta forma, o valor mais próximo é 25.

GABARITO: C

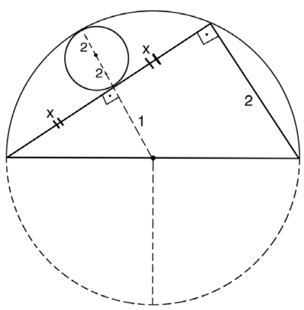
PROVA AMARELA = Nº 08

PROVA ROSA = Nº 04

8) Num semicírculo S, inscreve-se um triângulo retangulo ABC. A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tem raio 2. Sabe-se ainda que o menor cateto de ABC mede 2. Qual a área do semicírculo?

a) 10π
b) $12{,}5\pi$
c) 15π
d) $17{,}5\pi$
e) 20π

RESOLUÇÃO:



Raio = 2 + 2 + 1 = 5

Logo: $\dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} = 12{,}5\pi$

GABARITO: B

PROVA AMARELA = Nº 09

PROVA ROSA = Nº 08

9) Seja x um número real tal que $x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0$. Para cada valor possível de x, obtém-se o resultado da soma de x^2 com seu inverso. Sendo assim, o valor da soma desses resultados é

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

RESOLUÇÃO:

x real e $x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0$ (1)

$$S = x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$$

como x é real, $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = y$,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y\left(y^2 - 2\right)$$

$$x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = y^3 - 2y \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 2y - y$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

Em (1),

$y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 2 = 0 \Rightarrow y^3 + y^2 - 2y = 0$

$y(y^2 + y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$ ou $y = -2$

Como $S = x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$,

$S = x^2 + \frac{1}{x^2}$ pode ser -2 (não satisfez); -1 (não satisfaz) ou 2

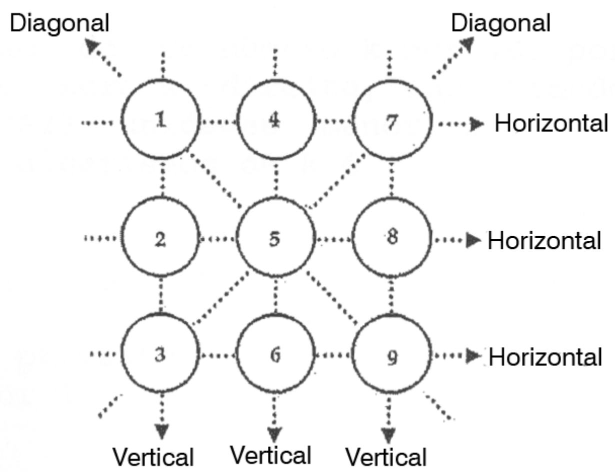
A soma dos valores de S = 2

GABARITO: D

PROVA AMARELA = Nº 10

PROVA ROSA = Nº 02

10) Observe a figura a seguir



A figura acima é formada por círculos numerados de 1 a 9. Seja "TROCA" a operação de pegar dois desses círculos e fazer com que um ocupe o lugar que era do outro. A quantidade mínima S de "TROCAS" que devem ser feitas para que a soma dos três valores de qualquer horizontal, vertical ou diagonal, seja a mesma, está no conjunto:

a) {1,2,3}
b) {4,5,6}
c) {7,8,9}
d) {10,11,12}
e) {13,14,15}

RESOLUÇÃO:

Quadrado mágico:	6	1	8
	7	5	3
	2	9	4

Quadrado fornecido:	1	4	7
	2	5	8
	3	6	9

1ª troca:	1	4	7
	2	5	8
	3	9	6

2ª troca:	1	4	7
	3	5	8
	2	9	6

3ª troca:	4	1	7
	3	5	8
	2	9	6

4ª troca:	6	1	7
	3	5	8
	2	9	4

5ª troca:	6	1	8
	3	5	7
	2	9	4

6ª troca:	6	1	8
	7	5	3
	2	9	4

GABARITO: B

PROVA AMARELA = Nº 11

PROVA ROSA = Nº 19

11) Seja *n* um número natural e $\oplus$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, separa os algarismos pares, os soma, e a esse resultado, acrescenta tantos zeros quanto for o número obtido. Exemplo: $\oplus(3256) = 2 + 6 = 8$, logo fica: 800000000. Sendo assim, o produto $[\oplus(20)] \cdot [\oplus(21)] \cdot [\oplus(22)] \cdot [\oplus(23)] \cdot [\oplus(24)] \cdot ... \cdot [\oplus(29)]$ possuirá uma quantidade de zeros igual a

a) 46

b) 45

c) 43

d) 41

e) 40

RESOLUÇÃO:

$\oplus(20) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 \times 10^2$

$\oplus(21) = \oplus(23) = \oplus(25) = \oplus(27) = \oplus(29) = 2 \times 10^2$

$\oplus(22) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 \times 10^4$

$\oplus(24) = 2 + 4 = 6 \Rightarrow 6 \times 10^6$

$\oplus(26) = 2 + 6 = 8 \Rightarrow 8 \times 10^8$

$\oplus(28) = 2 + 8 = 10 \Rightarrow 10 \times 10^{10} = 10^{11}$

$P = 2 \times 10^2 \times (2 \times 10^2)^5 \times 4 \times 10^4 \times 6 \times 10^6 \times 8 \times 10^8 \times 10^{11}$

$P = 2 \times 2^5 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10^{2+10+4+6+8+11}$

$P = 2^6 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10^{41}$

GABARITO: D

PROVA AMARELA = Nº 12

PROVA ROSA = Nº 12

12) Na multiplicação de um número k por 70, por esquecimento, não se colocou o zero à direita, encontrando-se, com isso, um resultado 32823 unidades menor. Sendo assim, o valor para a soma dos algarismos de k é

a) par.

b) uma potência de 5.

c) múltiplo de 7.

d) um quadrado perfeito.

e) divisível por 3.

RESOLUÇÃO:

$70k = 7k + 32823$

$63k = 32823$

$k = 521$

soma dos algarismos de $k = 5 + 2 + 1 = 8$

GABARITO: A

PROVA AMARELA = Nº 13

PROVA ROSA = Nº 16

13) Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12, Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

a) $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

c) $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

d) $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$

e) $\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$

RESOLUÇÃO:

O raio do círculo circunscrito a um triângulo órtico vale o dobro do raio do círculo circunscrito ao triângulo que o gerou.

Logo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)} = 15\sqrt{7}$$

$$\left(\text{sendo } p = \frac{8+10+12}{2} = 15\right)$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow {}^{2}\cancel{4}R = \frac{{}^{2}\cancel{8}\cdot{}^{2}\cancel{10}\cdot{}^{4}\cancel{12}}{\cancel{3}\cancel{1}\cancel{5}\sqrt{7}} \Rightarrow R = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7} \xrightarrow{\div 2} R_{\text{órtico}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

GABARITO: C

PROVA AMARELA = Nº 14

PROVA ROSA = Nº 14

14) ABC é um triângulo equilátero. Seja D um ponto do plano de ABC, externo a esse triângulo, tal que DB intersecta AC em E, com E pertencendo ao lado AC. Sabe-se que $B\hat{A}D = A\hat{C}D = 90°$. Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é

a) $\frac{1}{3}$

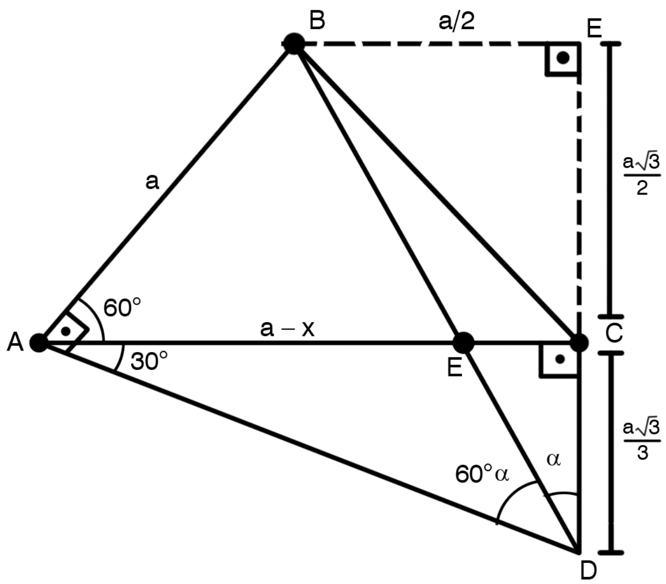
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

RESOLUÇÃO:



$\Delta BEC \cong \Delta CED$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2/3}+\frac{a\sqrt{3}}{3/2}} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{5a\sqrt{3}}{\cancel{6}_{2}}} = \frac{x}{\cancel{\frac{a\sqrt{3}}{3}}}$$

$\Rightarrow x = 2a/10 = a/5$

Logo: $x = a/5$ e $a - x = 4a/5$

Então como ΔABE e ΔBEC possuem a mesma altura, a razão entre suas áreas será a razão entre suas bases $\rightarrow \frac{S_{\Delta BEC}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{a/5}{4a/5} = \frac{1}{4}$

GABARITO: B

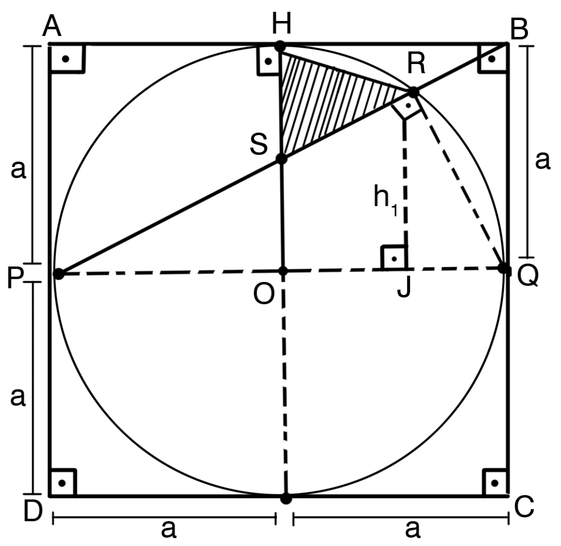
PROVA AMARELA = Nº 15

PROVA ROSA = Nº 20

15) Seja ABCD um quadrado de lado “2a” cujo centro é “O”. Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro “O” e raio “a” em R e, também OM, em “S”. Sendo assim, a área do triângulo SMR é

a) $\frac{3a^2}{20}$
b) $\frac{7a^2}{10}$
c) $\frac{9a^2}{20}$
d) $\frac{11a^2}{20}$
e) $\frac{13a^2}{20}$

RESOLUÇÃO:



1º) $\Delta SMB \equiv \Delta SOP \rightarrow \overline{SM} = \overline{SO} = a/2$

2º) $\Delta PRQ \cong \Delta PBQ$

$$\frac{\overline{RP}}{h_1} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BQ}} \Rightarrow \frac{\overline{RP}}{h_1} = \frac{\sqrt{a^2+4a^2}}{a} \Rightarrow \frac{RP}{h_1} = \frac{a\sqrt{5}}{a} = J$$

$$\overline{RP}^2 + \overline{RQ}^2 = 4a^2 \Rightarrow \overline{RP}^2 + \frac{\overline{RP}^2}{4} = 4a^2$$

$$\overline{SRP}^2 = 16a^2 \Rightarrow \overline{RP}^2 = \frac{4a}{\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$$

Logo $h_1 = \frac{\overline{RP}}{\sqrt{5}} = \frac{4a}{5}$

Assim $\overline{OJ} = \overline{PJ} - R = \frac{4a}{5} \cdot 2 - a = 3a/5$.

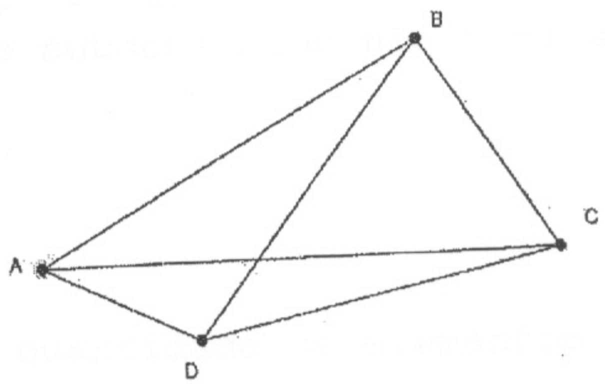
Então $S = \frac{a/2 \cdot 3a/5}{2} = 3a^2/20$

GABARITO: A

PROVA AMARELA = Nº 16

PROVA ROSA = Nº 13

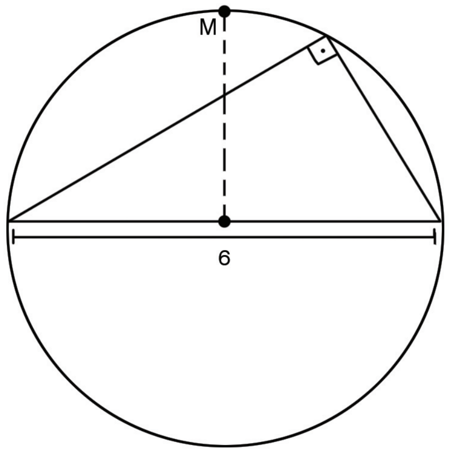
16) Observe a figura a seguir.



Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 6 e com catetos diferentes. Com relação a área ‘S’ de ABC, pode-se afirmar que

a) será máxima quando um dos catetos for $3\sqrt{2}$.
b) será máxima quando um dos ângulos internos for 30°.
c) será máxima quando um cateto for o dobro do outro.
d) será máxima quando a soma dos catetos for $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
e) seu valor máximo não existe.

RESOLUÇÃO:



A área máxima é obtida quando a altura relativa a hipotenusa for máxima. Esta seria obtida no ponto M e seria 3, mas a questão impõe que os catetos sejam diferentes. Logo não podemos ocupar a posição M, e sim qualquer outra posição mais próxima possível desta. Sabemos que $h < 3$ e a precisão utilzada afetaria a resposta, logo não existe um máximo

GABARITO: E

PROVA AMARELA = Nº 17

PROVA ROSA = Nº 11

17) Sejam $A = \{1, 2, 3, ..., 4029, 4030\}$ um subconjunto dos números naturais e $B \subset A$, tal que não existem x e y, $x \neq y$, pertencentes a B nos quais x divida y. O número máximo de elementos de B é N. Sendo assim, a soma dos algarismos de N é

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

RESOLUÇÃO:

$A = \{1, 2, 3, ..., 4029, 4030\}$

$B \subset A$ e tal que $x,y \in B$, x não é divisor de y

O conjunto B com número máximo de elementos será $B = \{2016, 2017, ...,4030\}$

$N(B) = N = 2015$

Soma dos algarismos de $N = 2 + 0 + 1 + 5 = 8$

GABARITO: A

PROVA AMARELA = Nº 18

PROVA ROSA = Nº 18

18) O número de divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000} é

a) 152

b) 196

c) 216

d) 256

e) 276

RESOLUÇÃO:

$N = 10^{2015}$

$N = 10^{2000} - 10^{15}$

$N = 10^{2000} \cdot 2^{15} \cdot 5^{15}$

número de divisores positivos de $2^{15} \cdot 5^{15} = (15 + 1) \cdot (15 + 1) = 256$

GABARITO: D

PROVA AMARELA = Nº 19

PROVA ROSA = Nº 15

19) Dado que o número de elementos dos conjuntos A e B são, respectivamente, p e q, analise as sentenças que seguem sobre o número N de subconjuntos não vazios de A⋃B.

I – $N = 2^p + 2^q - 1$

II – $N = 2^{pq-1}$

III – $N = 2^{p+q} - 1$

IV – $N = 2^p - 1$, se a quantidade de elementos de A⋂B é p.

Com isso, pode-se afirmar que a quantidade dessas afirmativas que são verdadeiras é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

RESOLUÇÃO:

N(A) = p

N(B) = q

N: número de subconjuntos não-vazios e A⋃B

$N(A \cup B) \leq p + q$

$N \leq 2^{p+q} - 1$

I. F

II. F

III. F

seria V se A e B fossem disjuntos

IV. F

seria V se $N = 2^q - 1$

GABARITO: A

PROVA AMARELA = Nº 20

PROVA ROSA = Nº 17

20) No triângulo isósceles ABC, AB = AC = 13 e BC = 10. Em AC marca-se R e S, com CR = 2x e CS = x. Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa, ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira x para que a área do hexagono PQRSTU seja máxima, obtém-se:

a) 5

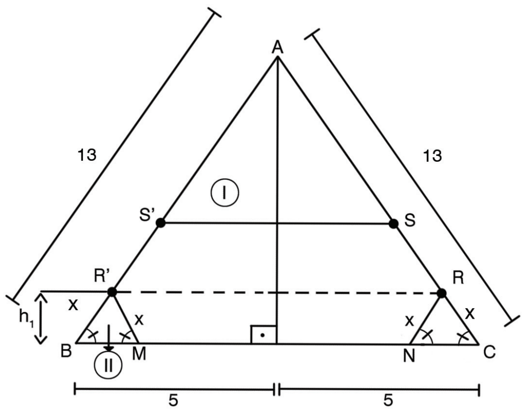
b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

RESOLUÇÃO:



1º) $\frac{x}{\overline{BM}} = \frac{13}{10}$

$\overline{BM} = \frac{10x}{13}$

2º) $\frac{x}{h_1} = \frac{13}{12}$

$h_1 = 12x/13$

Logo $S_{II} = \dfrac{\frac{10x}{13} \cdot \frac{\cancel{12}^{\,6}x}{13}}{\cancel{2}}$

$S_{II} = \frac{60x^2}{169}$

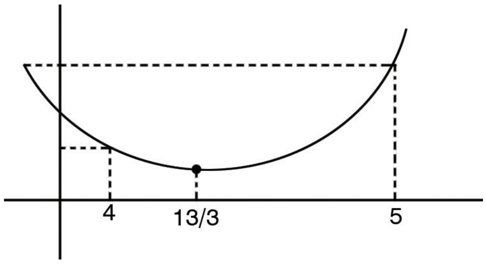
3º) $S_I = \dfrac{\left(5 - \dfrac{10x}{13}\right) \cdot \left(12 - \dfrac{24x}{13}\right)}{2} = \dfrac{60 - \dfrac{120x}{13} - \dfrac{120x}{13} + \dfrac{240x^2}{169}}{2}$

$S_I = 30 - \dfrac{120x}{13} + \dfrac{120x^2}{169}$

4º) S_{III} será máxima se $S_I + S_{II}$ for mínima

$\Rightarrow \dfrac{180x^2}{169} - \dfrac{120x}{13} + 30 \Rightarrow X_V = \dfrac{\cancel{120} / \cancel{13}}{{}_3\cancel{360} / \cancel{169}_{13}} = \dfrac{13}{3}$

Mas:



É mínima em 4

GABARITO: B